

2.2. Numere complexe

1. Se consideră numerele complexe $z_1 = 3 - 2i$ și $z_2 = -4 + 3i$. Calculați $z_1 + z_2$; $3z_1 - 2z_2$.
2. Calculați: a) $i \cdot i^2 \cdot \dots \cdot i^{10}$; b) $1 + i + i^2 + \dots + i^{10}$.
3. Calculați:
- a) $(1 - i)(1 + 2i) - 3(2 - i)$; b) $(2 + i)(3 - 2i) - (1 - 2i)(2 - i)$;
- c) $\frac{1 + 4i}{4 + 7i} + \frac{1 - 4i}{4 - 7i}$; d) $\left(\frac{1}{1 - i} - \frac{1}{1 + i}\right)^2$;
- e) $\left(\frac{(1 - 2i)(3i - 1)}{5}\right)^4$; f) $\left(\frac{1 - i}{\sqrt{2}}\right)^{24}$.
4. Demonstrați că:
- a) $\frac{25}{4 + 3i} + \frac{25}{4 - 3i} \in \mathbb{Z}$; b) $\frac{1 + 3i}{1 - 3i} + \frac{1 - 3i}{1 + 3i} \in \mathbb{R}$; c) $(1 + i\sqrt{3})^3 \in \mathbb{Z}$;
- d) $(1 + i\sqrt{3})^2 + (1 - i\sqrt{3})^2 \in \mathbb{Z}$; e) $(1 - i)^{24} \in \mathbb{R}$.
5. Determinați:
- a) partea imaginară a numărului $z = \frac{2 + 3i}{3 - 2i}$;
- b) partea reală a numărului $z = \frac{2 - i}{3i + 4}$;
- c) partea reală și partea imaginară ale numărului complex $z = \frac{5 + 8i}{8 - 5i}$;
- d) partea imaginară a numărului complex $z = (1 + i)^{10} + (1 - i)^{10}$.
6. a) Se consideră $a \in \mathbb{R}$ și numărul complex $z = \frac{a + 2i}{2 + ai}$. Determinați a pentru care $z \in \mathbb{R}$.
- b) Determinați $a \in \mathbb{R}$ astfel încât numărul $z = \frac{1}{a(1 + i) + 1 - 2i}$ să aibă partea reală egală cu $\frac{2}{5}$.
7. a) Determinați $x, y \in \mathbb{R}$, astfel încât $\frac{1 + 2x}{1 - 2i} + \frac{2 + y}{1 + 2i} = i$.
- b) Determinați $a, b \in \mathbb{R}$, astfel încât să avem egalitatea $(1 - i\sqrt{3})^3 = a + ib$.

8. Determinați forma algebrică a numerelor complexe:

a) $z = \sqrt{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{1+i} \right)^{103} + i^{102};$

b) $z = 1 + \frac{1-i}{1+i} + \left(\frac{1-i}{1+i} \right)^2 + \dots + \left(\frac{1-i}{1+i} \right)^9.$

9. Determinați conjugatul numărului $i^3 + 2.$

10. Fie z un număr complex. Arătați că $i(z - \bar{z})$ este număr real.

11. Dacă $z \in \mathbb{C}$ astfel încât $2\bar{z} + 3z \in \mathbb{R}$, demonstrați că $z \in \mathbb{R}.$

12. Fie $z_1 = -3 + 2i; z_2 = 4 - i.$ Arătați că $\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2; \overline{z_1 z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2; \overline{\left(\frac{z_1}{z_2} \right)} = \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}.$

13. Se consideră numărul complex $z = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}.$

a) Calculați $z + \frac{1}{z}.$

b) Arătați că $z^2 = \bar{z}.$

14. Determinați $z \in \mathbb{C}$, dacă:

a) $z + 3i = 6\bar{z};$

b) $2\bar{z} + z = 3 + 4i;$

c) $\frac{\bar{z} + 7i}{z} = 6.$

15. Determinați numerele complexe z care verifică egalitatea $z^2 = i\bar{z}.$

16. Se consideră numerele complexe $z_1 = 3 - 4i$ și $z_2 = -1 + 2i.$ Arătați că:

a) $|z_1 z_2| = |z_1| \cdot |z_2|;$

b) $\left| \frac{z_1}{z_2} \right| = \frac{|z_1|}{|z_2|};$

c) $|z_1 + z_2| < |z_1| + |z_2|.$

17. Calculați modulele numerelor complexe:

$z_1 = (3 - 4i)(1 + i);$

$z_2 = \sqrt{2} - 1 + i(\sqrt{2} + 1);$

$z_3 = \frac{8 + i}{7 - 4i};$

$z_4 = (\sqrt{2} - i)(\sqrt{3} + i);$

$z_5 = (2 + 3i)^2;$

$z_6 = (2 - i)^3 + (2 + i)^3.$

18. Precizați dacă există $z \in \mathbb{C}$ care să verifice simultan condițiile $|z - 1 - 2i| = 3$ și $\operatorname{Re} z \geq 5.$

19. Fie $z = a + 2i, a \in \mathbb{R}.$ Calculați $|z|,$ știind că $1 + i(z + \bar{z}) \in \mathbb{R}.$

20. Fie $z = 1 + i + i^2 + \dots + i^n, n \in \mathbb{N}.$

a) Dacă $n = 2010,$ calculați $|z|.$

b) Determinați $n,$ astfel încât $z \in \mathbb{R}.$

21* Fie $z \in \mathbb{C},$ astfel încât $(z + i)^{10} + (z - i)^{10} = 0.$

a) Arătați că $|z + i| = |z - i|.$

b) Demonstrați că $z \in \mathbb{R}.$

- 22.** Rezolvați în mulțimea numerelor complexe ecuațiile:
 a) $z^2 = -9$; b) $z^2 - 2z + 2 = 0$; c) $z^2 - 8z + 25 = 0$; d) $z^2 = 2i$.
- 23.** Fie z_1, z_2 soluțiile ecuației $2z^2 + z + 50 = 0$. Calculați $|z_1| + |z_2|$.
- 24.** Se consideră numărul complex $z = a + bi$, $a, b \in \mathbb{R}$ și notăm cu $\bar{z} = a - bi$.
 a) Calculați $z + \bar{z}$ și $z \cdot \bar{z}$.
 b) Verificați dacă $z^2 - 2az + a^2 + b^2 = 0$.
 c) Determinați $c, d \in \mathbb{R}$, știind că $x = 3 + 4i$ verifică ecuația $x^2 + cx + d = 0$.
- 25.** a) Arătați că $(1 - i)^2 = -2i$.
 b) Rezolvați ecuația $iz^2 + (3 + i)z + 2 - 2i = 0$, $z \in \mathbb{C}$.
- 26.** Dacă z este o soluție a ecuației $z^2 + 2z + 4 = 0$, arătați că $z^2 - \frac{8}{z} = 0$.
- 27.** Fie $z \in \mathbb{C}^*$, astfel încât $z^2 - z + 1 = 0$. Calculați:
 a) $\left|z + \frac{1}{z}\right|$; b) z^3 ; c) $z^{100} + \frac{1}{z^{100}}$.
- 28.** Fie $z \in \mathbb{C}^*$, astfel încât $z + \frac{1}{z} = 1$.
 a) Arătați că $z^3 = -1$. b) Calculați $z^{10} + z^{-10}$.
- 29*** Se consideră $\alpha \in \mathbb{C}$ astfel încât $\alpha^2 + \alpha + 1 = 0$.
 a) Calculați suma $S = 1 + \alpha + \alpha^2 + \dots + \alpha^{99}$.
 b) Arătați că $[(1 + \alpha)^{6n+2} + 1]^2 - \alpha = 0$.
- 30.** Rezolvați ecuația $x^2 - (a + i)x + 1 + i = 0$, $a \in \mathbb{R}$, știind că are o soluție reală.
- 31.** Rezolvați în mulțimea numerelor complexe ecuațiile:
 a) $t^3 + t^2 + t + 1 = 0$; b) $\left(\frac{3z+1}{z-i}\right)^3 + \left(\frac{3z+1}{z-i}\right)^2 + \left(\frac{3z+1}{z-i}\right) + 1 = 0$.
- 32.** Rezolvați în \mathbb{C} ecuațiile:
 a) $x^4 + 8x^2 - 9 = 0$; b) $x^6 + 7x^3 - 8 = 0$.
- 33*** Determinați cardinalul mulțimilor $M_2 \cup M_4$ și $M_{12} \cup M_{16}$, dacă $M_n = \{z \in \mathbb{C} \mid z^n = 1\}$, $n \in \mathbb{N}$.
- 34.** Se consideră funcția $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, $f(z) = 3z - 4\bar{z}$.
 a) Arătați că $f(a + bi) = -a + 7bi$, $a, b \in \mathbb{R}$.
 b) Arătați că $(f \circ f)(z) = 25z - 24\bar{z}$.
 c) Arătați că $f(z) = 0$ dacă și numai dacă $z = 0$.

„Tudós hajlamai nem tették rendtársunkat sem rideggé, sem zárkózottá; derült kedélye mindvégig megtartotta keresetlen melegségét s ha néha ítéleteiből egyik-másik kedvelt filozófiájával olykor az utópiák határához közeledett is: az csak a teljes jogegyenlőségért, az egyéni világglyűlő keserűség. Nézeteit szerette leplezetlenül feltárni, viszont szívesen hallgatta meg mások meggyőződések alapuló véleményét; becsülte az egyenes és kíméletlen szót, de gyűlölte az alakoskodó képmutatást. Korunk megalkuvó szelleme és a korlátlanságra törő hatalom túlkas humanizmusa, mély emberbaráti szeretete nemcsak szavakban nyilvánult.”

„December 31-én – írja a budapesti házfőnök – elszorult szívvel vettük körül haldokló társunkat s az utolsókenet szentségében részesítettük őt, minek felvétele után bágyadt hangon többször ismételte e szavakat: «Istenem, irgalmazz, kegyelmezz». Érezve végső órájának közelségét, meghatottan nyújtotta végbúcsúra elhidegült jobbát ágyánál megjelent rendtársainak. Szenvedése, mit erős lélekkel túrt, esti 1/2 6 órakor ért véget, a mikor csendesen, minden agónia nélkül visszaadta lelkét Teremtőjének, 1902. évi december hó 31-én, korának 58-ik és szerzetesi életének 44-ik évében, Budapesten.”

Vályi Gyula tehát Schmidt Ágostontól tanult számelméletet és ábrázoló geometriát. Réthy Mór csak 1874-ben lett az elméleti fizika professzora, de a hajdani Kolozsvári Egyetem Tanrendje szerint, „komoly” matematikai diszciplínákat csak Schmidt Ágoston tanított 1874–1879 között. Köszönetet mondok Labancz Zsolt atyának, a Piarista Rendtartomány főnökének, Koltai Andrásnak, a rend levéltárosának, a Schmidt Ágostonról adott értékes adatokért, továbbá Kása Zoltán professzornak, aki felhívta a figyelmet a Ferenc József Tudományegyetem Tanrendjének az áttanulmányozására.

IV. ORSZÁGOS MAGYAR MATEMATIKAOLIMPIA XXXI. ERDÉLYI MAGYAR MATEMATIKAVERSENY*

Kolozsvár, 2022. április 20–23.

I. forduló

XI. osztály

1. Az $(x_n)_{n \geq 1}$ sorozat esetén $x_1 \geq 1$ és $x_{n+1} = 2 - \frac{1}{x_n}$, minden $n \in \mathbb{N}^*$ esetén.
 - a) Határozd meg a sorozat általános tagjának képletét, ha $x_1 = 2$.
 - b) Bizonyítsd be, hogy minden $x_1 \geq 1$ kezdőérték esetén a sorozat konvergens és határértéke 1.
 - c) Számítsd ki a $\lim_{n \rightarrow +\infty} n(x_n - 1)$ határértéket!

András Szilárd, Kolozsvár

*Folytatás lapunk 2022/5–6. számából.

2. Adott az $A = \begin{pmatrix} 9 & -7 \\ 8 & -6 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$ mátrix.

a) Határozd meg az A^n mátrixot, ahol $n \in \mathbb{N}^*$.

b) Adott az $f: \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{3}{4}\right\} \rightarrow \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{3}{4}\right\}$, $f(x) = \frac{9x-7}{8x-6}$ függvény és legyen $f_n = \underbrace{f \circ f \circ \dots \circ f}_{n\text{-szer}}$. Határozd meg az f_{2022} függvényt!

Bara Lajos, Zilah
Kocsis Attila, Déva

3. Legyen \mathcal{A} azoknak az $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ mátrixoknak a halmaza, amelyek esetén $\det A = 1$, illetve $\det(A^4 + A^2 + I_2) = 1$.

a) Határozd meg a $\mathcal{T} = \{\text{Tr}(A) \mid A \in \mathcal{A}\}$ halmazt, ahol $\text{Tr}(A)$ az A mátrix főátlón levő elemeinek összegét jelöli!

b) Határozd meg a $\mathcal{D} = \{\det(A + A^{-1}) \mid A \in \mathcal{A}\}$ halmazt!

Tóth Csongor, Szováta

4. Az $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ és $(y_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ sorozatokat az $x_n = (45 + \sqrt{2022})^n$, bármely $n \in \mathbb{N}^*$, illetve $y_n = (45 - \sqrt{2022})^n$, bármely $n \in \mathbb{N}^*$ képletekkel értelmeztük.

a) Igazold, hogy $x_n + y_n \in \mathbb{N}$, minden $n \in \mathbb{N}^*$ esetén!

b) Számítsd ki a $\lim_{n \rightarrow +\infty} \{x_n\}^{\frac{1}{3^n}}$ határértéket, ahol $\{a\}$ az a valós szám törtrészét jelöli!

Tóth Csongor, Szováta

Megoldások

1. a) A rekurzió alapján $x_2 = 2 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$, $x_3 = \frac{4}{3}$, $x_4 = \frac{5}{4}$.

A matematikai indukció módszerével igazoljuk, hogy $x_n = \frac{n+1}{n}$, bármely $n \geq 1$ esetén.

Az eddigiek alapján a $P(n): x_n = \frac{n+1}{n}$ állítás igaz $n \in \{1, 2, 3, 4\}$ esetén. Másrészt, ha $x_k = \frac{k+1}{k}$ valamilyen $k \in \mathbb{N}^*$ esetén, akkor a rekurzió alapján $x_{k+1} = 2 - \frac{1}{x_k} = 2 - \frac{k}{k+1} = \frac{k+2}{k+1}$, tehát a $P(k+1)$ állítás is igaz. Így a matematikai indukció elve alapján $P(n)$ igaz, bármely $n \geq 1$ természetes számra, tehát $x_n = \frac{n+1}{n}$, bármely $n \in \mathbb{N}^*$ esetén.

b) Ha $x \geq 1$, akkor egyrészt $\frac{1}{x} \leq 1$, és ezért $2 - \frac{1}{x} \geq 1$, másrészt az $x + \frac{1}{x} \geq 2$ egyenlőtlenség alapján $2 - \frac{1}{x} \leq x$. A matematikai indukció módszerével igazoljuk, hogy a sorozat minden tagja az $[1, +\infty)$ intervallumban van. Valóban, ha $x_k \geq 1$, akkor $x_{k+1} = 2 - \frac{1}{x_k} \geq 1$.

Másrészt, $x_{n+1} - x_n = 2 - \frac{1}{x_n} - x_n \leq 0$, bármely $n \in \mathbb{N}^*$ esetén, tehát a sorozat csökkenő. Az előbbieket alapján $x_n \in [1, 2)$ minden $n \in \mathbb{N}^*$ esetén, tehát a sorozat konvergens. Legyen $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = \ell$.

A rekurzióban határértékre térve azt kapjuk, hogy $\ell = 2 - \frac{1}{\ell}$, ahonnan $(\ell - 1)^2 = 0$, tehát $\ell = 1$.

c) Legyen $L = \lim_{n \rightarrow +\infty} n(x_n - 1) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{\frac{1}{x_n - 1}}$. A b) alpont alapján az $\frac{1}{x_n - 1}$ sorozat növekvő és végtelenhez tart, tehát a Cesàro–Stolz-kritérium alkalmazható. Ugyanakkor

$$\frac{1}{x_{n+1} - 1} - \frac{1}{x_n - 1} = \frac{1}{1 - \frac{1}{x_n}} - \frac{1}{x_n - 1} = 1,$$

tehát a Cesàro–Stolz-kritérium alapján $L = 1$.

Megjegyzés. A $\frac{1}{x_{n+1} - 1} - \frac{1}{x_n - 1} = \frac{1}{1 - \frac{1}{x_n}} - \frac{1}{x_n - 1} = 1$ összefüggés alapján az általános tag tetszőleges x_1 esetén felírható, hiszen $\frac{1}{x_n - 1} = \frac{1}{x_1 - 1} + n - 1$, tehát

$$x_n = 1 + \frac{1}{n - 1 + \frac{1}{x_1 - 1}}.$$

Természetesen az x_1 nem lehet $1 - \frac{1}{n - 1}$ alakú, ahol $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$. Ugyanezt az eredményt kaptuk volna akkor is, ha a lineáris törtranszformációból származó rekurziók általános megoldási módszerét alkalmaztuk volna.

2. a) Legyen minden $n \in \mathbb{N}^*$ esetén $A^n = \begin{pmatrix} x_n & y_n \\ u_n & v_n \end{pmatrix}$. Mivel

$$\begin{pmatrix} x_{n+1} & y_{n+1} \\ u_{n+1} & v_{n+1} \end{pmatrix} = A^{n+1} = A^n \cdot A = \begin{pmatrix} x_n & y_n \\ u_n & v_n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 9 & -7 \\ 8 & -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9x_n + 8y_n & -7x_n - 6y_n \\ 9u_n + 8v_n & -7u_n - 6v_n \end{pmatrix},$$

innen következik, hogy $\begin{cases} x_{n+1} = 9x_n + 8y_n \\ y_{n+1} = -7x_n - 6y_n \end{cases}$ és $\begin{cases} u_{n+1} = 9u_n + 8v_n \\ v_{n+1} = -7u_n - 6v_n, \end{cases}$ valamint tudjuk, hogy $x_1 = 9, y_1 = -7, u_1 = 8$ és $v_1 = -6$. Az első rendszer egyenleteinek megfelelő oldalait összeadva, következik, hogy minden $n \in \mathbb{N}^*$ esetén $x_{n+1} + y_{n+1} = 2(x_n + y_n)$, tehát $x_n + y_n = 2^{n-1}(x_1 + y_1) = 2^n$, minden $n \in \mathbb{N}^*$ esetén. Felhasználva ezt az eredményt, írhatjuk, hogy minden $n \geq 1$ esetén $x_n = 9x_{n-1} + 8y_{n-1} = 9x_{n-1} + 8(2^{n-1} - x_{n-1}) = x_{n-1} + 2^{n-1}$. Összeadva az összefüggéseket $k = 2, 3, 4, \dots, n$ értékekre, azt kapjuk, hogy $x_n = x_1 + 2^4 + 2^5 + \dots + 2^{n+2} = 9 + (2^{n+3} - 1) - 1 - 2 - 4 - 8 = 2^{n+3} - 7$, bármely $n \in \mathbb{N}^*$ esetén.

Innen következik, hogy $y_n = -7 \cdot 2^n + 7$, bármely $n \geq 1$ esetén, és mivel az $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ és $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ sorozatok is ugyanazt a rekurziórendszert teljesítik, mint az $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$, illetve az $(y_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$, csak más kezdeti értékekkel, analóg módon következik, hogy $u_n = 2^{n+3} - 8$, valamint $v_n = -7 \cdot 2^n + 8$ minden $n \in \mathbb{N}^*$ esetén.

b) Az $f: \mathbb{R} \setminus \left\{ -\frac{d}{c} \right\} \rightarrow \mathbb{R} \setminus \left\{ -\frac{d}{c} \right\}$, $f(x) = \frac{ax + b}{cx + d}$ függvény homografikus (ha $ad - bc \neq 0$), és a hozzárendelt mátrixa az $M_f = A$. Tudjuk, hogy a homografikus függvények összetétele homografikus, és $M_{f \circ g} = M_f \cdot M_g$, tehát $M_{f^n} = (M_f)^n$.

Így a) alapján $M_{f^n} = A^n = \begin{pmatrix} 2^{n+3} - 7 & -7(2^n - 1) \\ 8(2^n - 1) & 8 - 7 \cdot 2^n \end{pmatrix}$, bármely $n \geq 1$ esetén, tehát

$$f_{2022}(x) = \frac{(2^{2025} - 7)x - 7(2^{2022} - 1)}{8(2^{2022} - 1)x + 8 - 7 \cdot 2^{2022}}.$$

Második megoldás az a) alpontra.

Az A mátrix karakterisztikus polinomja $p_A(x) = x^2 - \text{Tr}(A)x + \det(A) = x^2 - 3x + 2$, amelynek a gyökei $x_1 = 1$ és $x_2 = 2$.

Ezért a Cayley–Hamilton-tétel egyik következménye alapján léteznek a B és C mátrixok úgy, hogy $A^n = 1^n B + 2^n C$, bármely $n \geq 1$ esetén.

Meghatározzuk a B és C mátrixokat ebből az összefüggésből, felhasználva az $n = 1$ és $n = 2$ eseteket: mivel $A = B + 2C$ és $A^2 = B + 4C$, következik, hogy $2C = A^2 - A$, ahonnan

$$C = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 25 & -21 \\ 24 & -20 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 9 & -7 \\ 8 & -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & -7 \\ 8 & -7 \end{pmatrix} \quad \text{és} \quad B = A - 2C = \begin{pmatrix} -7 & 7 \\ -8 & 8 \end{pmatrix}.$$

Tehát minden $n \geq 1$ esetén

$$A^n = \begin{pmatrix} -7 & 7 \\ -8 & 8 \end{pmatrix} + 2^n \begin{pmatrix} 8 & -7 \\ 8 & -7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^{n+3} - 7 & -7(2^n - 1) \\ 8(2^n - 1) & 8 - 7 \cdot 2^n \end{pmatrix}.$$

3. a) Észrevesszük, hogy $A^4 + A^2 + I_2 = A^4 + 2A^2 + I_2 - A^2 = (A^2 + I_2)^2 - A^2$. A Cayley–Hamilton-tétel alapján a $\text{Tr}(A) = t$ jelölést használva $A^2 - tA + \det A \cdot I_2 = O_2$, ahonnan azt kapjuk, hogy $A^2 + I_2 = tA$.

Ezt behelyettesítve az előző összefüggésbe, következik, hogy

$$A^4 + A^2 + I_2 = (tA)^2 - A^2 = (t^2 - 1)A^2.$$

Tehát a $\det(A^4 + A^2 + I_2) = 1$ egyenlőség egyenértékű azzal, hogy $(t^2 - 1)^2(\det A)^2 = 1$, ahonnan $(t^2 - 1)^2 = 1$, és így $t \in \{0, \pm\sqrt{2}\}$.

Belátható, hogy ha az A mátrix rendre a $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} \sqrt{2} & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ és $\begin{pmatrix} -\sqrt{2} & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ mátrixok egyike, akkor egyrészt A teljesíti a feladat kijelentésében megadott feltételeket, másrészt pedig $\text{Tr}(A)$ rendre 0 , $\sqrt{2}$, illetve $-\sqrt{2}$. Tehát $\mathcal{T} = \{0, -\sqrt{2}, \sqrt{2}\}$.

b) Írhatjuk, hogy $\det(A + A^{-1}) = \det(A + A^{-1}) \det A = \det((A + A^{-1})A) = \det(A^2 + I_2) = \det(tA) = t^2 \det A = t^2$, tehát $\det(A + A^{-1}) \in \{0, 2\}$.

Az a) alpont megoldásának a végén megadott A mátrixok esetén a $\det(A + A^{-1})$ felveszi a 0 és 2 értékeket. Tehát $\mathcal{D} = \{0, 2\}$.

Második megoldás az a) alpontra

A Cayley–Hamilton-tétel alapján $A^2 - tA + \det A \cdot I_2 = O_2$, és innen következik, hogy $A^2 + I_2 = tA$. Ez alapján $A^4 + A^2 + I_2 = A^4 + tA$. Tehát

$$\det(A^4 + A^2 + I_2) = \det(A^4 + tA) = \det A \cdot \det(A^3 + tI_2) = \det(A^3 + tI_2).$$

Ugyanakkor, az $A^2 + I_2 = tA$ összefüggésből következik, hogy

$$A^3 + A = tA^2 = t(tA - I_2) = t^2A - tI_2,$$

tehát $A^3 = t^2A - tI_2 - A$.

Ezt felhasználva következik, hogy

$$\det(A^3 + tI_2) = \det(t^2A - A) = (t^2 - 1)^2 \det A = (t^2 - 1)^2.$$

Mivel $\det(A^4 + A^2 + I_2) = 1$, következik, hogy $(t^2 - 1)^2 = 1$, ahonnan $t \in \{0, \pm\sqrt{2}\}$.

Az első megoldásban megadott példák mutatják, hogy mindhárom t érték felvevődik.

4. a) Newton binomiális képlete alapján írhatjuk, hogy minden $n \in \mathbb{N}^*$ esetén

$$\begin{aligned} x_n + y_n &= \sum_{k=0}^n C_n^k 45^{n-k} 2022^{\frac{k}{2}} + \sum_{k=0}^n C_n^k 45^{n-k} (-1)^k 2022^{\frac{k}{2}} \\ &= \sum_{k=0}^n C_n^k 45^{n-k} 2022^{\frac{k}{2}} (1 + (-1)^k) = \sum_{\substack{0 \leq k \leq n \\ k \text{ páros}}} C_n^k 45^{n-k} 2022^{\frac{k}{2}}, \end{aligned}$$

ahonnan következik, hogy $(x_n + y_n) \in \mathbb{N}$, minden $n \in \mathbb{N}^*$ esetén.

b) Minden $n \in \mathbb{N}^*$ esetén $x_n, y_n > 0$ és

$$y_n = (\sqrt{2025} - \sqrt{2022})^n = \left(\frac{3}{\sqrt{2025} + \sqrt{2022}} \right)^n \in (0, 1).$$

Mivel az a) alpont alapján $\{x_n + y_n\} = 0$, ezért $\{x_n\} = 1 - y_n$.

Ugyanakkor, $x_n y_n = (45 + \sqrt{2022})^n (45 - \sqrt{2022})^n = (2025 - 2022)^n = 3^n$, ezért írhatjuk, hogy $\lim_{n \rightarrow +\infty} \{x_n\}^{\frac{x_n}{3^n}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} (1 - y_n)^{\frac{x_n}{3^n}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} (1 - y_n)^{\frac{3^n}{3^n y_n}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} (1 - y_n)^{\frac{1}{y_n}} =$

$$= \lim_{n \rightarrow +\infty} (1 - y_n)^{-\frac{1}{y_n} \cdot (-1)} = \frac{1}{e}, \text{ mivel } \lim_{n \rightarrow +\infty} y_n = 0.$$

XII. osztály

1. Adott a $G = (-2022, 2022)$ halmaz és az $x * y = \frac{2022^2(x+y)}{2022^2 + xy}$ művelet, bármely $x, y \in G$ esetén.

a) Igazold, hogy $(G, *)$ csoport és az $f: (G, *) \rightarrow (\mathbb{R}_+, \cdot)$, $f(x) = \frac{2022 - x}{2022 + x}$ függvény csoportizomorfizmus!

b) Számítsd ki tetszőleges $n \geq 2$ természetes szám esetén a

$$\frac{2022}{7} * \frac{2022}{17} * \dots * \frac{2022}{2n^2 - 1}$$

kifejezés értékét!

2. Határozd meg az $f: (0, \pi) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{\sin x(3 - \sin 2x)}$ függvény primitívjeit!

Kovács Béla, Szatmárnémeti

3. Határozd meg azokat az $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ folytonos függvényeket, melyeknek létezik $F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ primitív függvényük úgy, hogy $[f(x)] - \{f(x)\} = F(x)$, bármely $x \in \mathbb{R}$ esetén, ahol $[a]$ az a valós szám egészrészét, $\{a\}$ pedig a törtrészét jelöli!

Ugron Szabolcs, Sepsiszentgyörgy

4. Legyen $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ egy olyan primitív függvénnyel rendelkező függvény, amelynek valamely $F: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ primitívjére a $\lim_{\substack{t \rightarrow 0 \\ t > 0}} tF\left(\frac{1}{t}\right)$ határérték véges. Jelöljük ezt a határértéket L -el. Bizonyítsd be, hogy a $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = \begin{cases} f\left(\frac{1}{x^2}\right), & x \neq 0 \\ c, & x = 0 \end{cases}$ függvénynek pontosan

akkor létezik primitív függvénye, ha $c = L$.

András Szilárd, Kolozsvár

Megoldások

1. a) Igazoljuk, hogy „ $*$ ” belső művelet G halmazon. Legyenek $x, y \in G$ tetszőlegesek. Ekkor $|x| < 2022$ és $|y| < 2022$, ezért $|xy| < 2022^2$, tehát $2022^2 + xy > 0$. Innen rendre következik, hogy

$$-2022 < x * y < 2022 \Leftrightarrow -1 < \frac{2022(x+y)}{2022^2 + xy} < 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -2022^2 - xy < 2022(x+y) < 2022^2 + xy \Leftrightarrow -(x+2022)(y+2022) < 0 < (2022-x)(2022-y),$$

ami igaz minden $x, y \in G$ esetén. Tehát „ $*$ ” belső művelet a G halmazon.

Belátjuk, hogy $f(x * y) = f(x) \cdot f(y)$, minden $x, y \in G$ esetén. Valóban,

$$f(x * y) = f\left(\frac{2022^2(x+y)}{2022^2 + xy}\right) = \frac{2022 - \frac{2022^2(x+y)}{2022^2 + xy}}{2022 + \frac{2022^2(x+y)}{2022^2 + xy}} = \frac{1 - \frac{2022(x+y)}{2022^2 + xy}}{1 + \frac{2022(x+y)}{2022^2 + xy}} =$$

$$= \frac{2022^2 + xy - 2022(x+y)}{2022^2 + xy + 2022(x+y)} = \frac{(2022-x)(2022-y)}{(2022+x)(2022+y)} = f(x) \cdot f(y), \text{ minden } x, y \in G \text{ esetén.}$$

Az f függvény folytonos és deriválható a $(-2022, 2022)$ intervallumon, és $f'(x) = \frac{-2 \cdot 2022}{(2022+x)^2} < 0$, minden $x \in G$ esetén, tehát f szigorúan csökkenő a G halmazon, és ezért injektív is. Másrészt, $\lim_{x \searrow -2022} f(x) = +\infty$ és $\lim_{x \nearrow 2022} f(x) = 0$, ezért $\text{Im}(f) = \mathbb{R}_+$, vagyis f szürjektív. Tehát f bijektív.

Mivel (\mathbb{R}_+, \cdot) csoport, ezért az előbbi tulajdonságok alapján $(G, *)$ is csoport és f csoport-izomorfizmus.

b) Az a) alpont alapján minden $n \geq 2$ természetes szám esetén

$$f\left(\frac{2022}{7} * \frac{2022}{17} * \dots * \frac{2022}{2n^2-1}\right) = f\left(\frac{2022}{7}\right) \cdot f\left(\frac{2022}{17}\right) \cdot \dots \cdot f\left(\frac{2022}{2n^2-1}\right).$$

Viszont minden $k \geq 2$ természetes szám esetén

$$f\left(\frac{2022}{2k^2-1}\right) = \frac{2022 - \frac{2022}{2k^2-1}}{2022 + \frac{2022}{2k^2-1}} = \frac{2 \cdot 2022k^2 - 2 \cdot 2022}{2 \cdot 2022k^2} = \frac{(k-1)(k+1)}{k^2}, \text{ ezért}$$

$$f\left(\frac{2022}{7}\right) \cdot f\left(\frac{2022}{17}\right) \cdot \dots \cdot f\left(\frac{2022}{2n^2-1}\right) = \prod_{k=2}^n \frac{(k-1)(k+1)}{k^2} = \frac{n+1}{2n}, \text{ bármely } n \in \mathbb{N}, n \geq 2 \text{ esetén.}$$

$$\text{Legyen } a_n = \frac{2022}{7} * \frac{2022}{17} * \dots * \frac{2022}{2n^2-1}. \text{ Ekkor } f(a_n) = \frac{n+1}{2n}, \text{ de ugyanakkor } f(a_n) = \frac{2022 - a_n}{2022 + a_n}, \text{ tehát } a_n = \frac{2022(n-1)}{3n+1}, \text{ minden } n \geq 2 \text{ természetes szám esetén.}$$

2. Első megoldás

Az adott trigonometriai törtfüggvényt egyszerűbb törtekre bontjuk:

$$f(x) = \frac{1}{\sin x(3 - \sin 2x)} = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{\sin x} + \frac{2 \cos x}{3 - \sin 2x} \right).$$

$$\text{Így } I = \int f(x) dx = \frac{1}{3} \int \left(\frac{1}{\sin x} + \frac{2 \cos x}{3 - \sin 2x} \right) dx = \frac{1}{3} I_1 + \frac{2}{3} I_2, \text{ ahol } I_1 = \int \frac{1}{\sin x} dx = \int \frac{\sin x}{\sin^2 x} dx = \int \frac{(\cos x)'}{\cos^2 x - 1} dx = \frac{1}{2} \cdot \ln \left| \frac{\cos x - 1}{\cos x + 1} \right| + C = \ln \sqrt{\frac{1 - \cos x}{1 + \cos x}} + C = \ln \text{tg} \frac{x}{2} + C \text{ és}$$

$$I_2 = \int \frac{\cos x}{3 - \sin 2x} dx. \text{ Legyen } J_2 = \int \frac{\sin x}{3 - \sin 2x} dx. \text{ Ekkor}$$

$$I_2 + J_2 = \int \frac{\cos x + \sin x}{3 - \sin 2x} dx = \int \frac{(\sin x - \cos x)'}{2 + (\sin x - \cos x)^2} dx = \frac{1}{\sqrt{2}} \arctg \frac{\sin x - \cos x}{\sqrt{2}} + C, \text{ valamint}$$

$$I_2 - J_2 = \int \frac{\cos x - \sin x}{3 - \sin 2x} dx = \int \frac{(\sin x + \cos x)'}{4 - (\sin x + \cos x)^2} dx = \frac{1}{4} \ln \left| \frac{2 + \sin x + \cos x}{2 - \sin x - \cos x} \right| + C.$$

Összeadva az előbbi két eredményt, következik, hogy

$$I_2 = \frac{1}{2\sqrt{2}} \arctg \frac{\sin x - \cos x}{\sqrt{2}} + \frac{1}{8} \ln \left| \frac{2 + \sin x + \cos x}{2 - \sin x - \cos x} \right| + C,$$

$$\text{tehát } I = \frac{1}{3} I_1 + \frac{2}{3} I_2 = \frac{1}{3} \ln \text{tg} \frac{x}{2} + \frac{1}{3\sqrt{2}} \arctg \frac{\sin x - \cos x}{\sqrt{2}} + \frac{1}{12} \ln \left| \frac{2 + \sin x + \cos x}{2 - \sin x - \cos x} \right| + C.$$

Második megoldás

Írhatjuk, hogy

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{1}{\sin x(3 - \sin 2x)} dx = \int \frac{1}{\sin x(4 - (1 + \sin 2x))} dx = \\ &= \int \frac{1}{\sin x(4 - (\sin x + \cos x)^2)} dx = \\ &= \int \frac{1}{\sin x(2 - (\sin x + \cos x))(2 + (\sin x + \cos x))} dx. \end{aligned}$$

A $\operatorname{tg} \frac{x}{2} = t$, $dx = \frac{2}{1+t^2} dt$ helyettesítést és a $\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$, valamint $\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$

képleteket használva következik, hogy

$$I = \int \frac{1}{\frac{2t}{1+t^2} \left(2 - \frac{2t+1-t^2}{1+t^2}\right) \left(2 + \frac{2t+1-t^2}{1+t^2}\right)} \cdot \frac{2}{1+t^2} dt =$$

$$= \int \frac{(1+t^2)^2}{t(3t^2-2t+1)(t^2+2t+3)} dt = \frac{1}{3} \int \frac{1}{t} dt - \frac{1}{2} \int \frac{t-1}{3t^2-2t+1} dt + \frac{1}{6} \int \frac{t-1}{t^2+2t+3} dt,$$

ahol felhasználtuk az $\frac{(1+t^2)^2}{t(3t^2-2t+1)(t^2+2t+3)} = \frac{A}{t} + \frac{Bt+C}{3t^2-2t+1} + \frac{Dt+E}{t^2+2t+3}$ felbontást,

ahonnan azt kaptuk, hogy $A = \frac{1}{3}$, $B = -\frac{1}{2}$, $C = \frac{1}{2}$, $D = \frac{1}{6}$ és $E = -\frac{1}{6}$.

A kapott integrálokat a következő módon számolhatjuk ki:

$$\int \frac{t-1}{3t^2-2t+1} dt = \frac{1}{6} \int \frac{(6t-2)-4}{3t^2-2t+1} dt = \frac{1}{6} \cdot \ln(3t^2-2t+1) - \frac{2}{3} \int \frac{1}{3t^2-2t+1} dt =$$

$$= \frac{1}{6} \cdot \ln(3t^2-2t+1) - \frac{2}{9} \int \frac{1}{\left(t-\frac{1}{3}\right)^2 + \frac{2}{9}} dt = \frac{1}{6} \cdot \ln(3t^2-2t+1) - \frac{2}{9} \cdot \frac{3}{\sqrt{2}} \cdot \operatorname{arctg} \frac{t-\frac{1}{3}}{\frac{\sqrt{2}}{3}} + C =$$

$$= \frac{1}{6} \cdot \ln(3t^2-2t+1) - \frac{\sqrt{2}}{3} \cdot \operatorname{arctg} \frac{3t-1}{\sqrt{2}} + C,$$

$$\int \frac{t-1}{t^2+2t+3} dt = \frac{1}{2} \int \frac{(2t+2)-4}{t^2+2t+3} dt = \frac{1}{2} \cdot \ln(t^2+2t+3) - 2 \int \frac{1}{(t+1)^2+2} dt =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \ln(t^2+2t+3) - \frac{2}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{t+1}{\sqrt{2}} + C. \text{ Tehát az eredeti integrál}$$

$$I = \frac{1}{3} \ln t - \frac{1}{12} \ln(3t^2-2t+1) + \frac{\sqrt{2}}{6} \operatorname{arctg} \frac{3t-1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{12} \cdot \ln(t^2+2t+3) - \frac{\sqrt{2}}{6} \operatorname{arctg} \frac{t+1}{\sqrt{2}} + C,$$

ahol $t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$.

3. Az eredeti összefüggés ekvivalens az $[f(x)] - f(x) + [f(x)] = F(x)$, bármely $x \in \mathbb{R}$ esetén, vagyis az $f(x) + F(x) = 2[f(x)]$, bármely $x \in \mathbb{R}$ összefüggéssel.

A feltétel alapján az f függvény folytonos, az F deriválható, tehát folytonos, ezért az $f + F$ függvény is folytonos.

Mivel $[f(x)] \in \mathbb{Z}$, bármely $x \in \mathbb{R}$ esetén, az előbbi észrevételek alapján létezik olyan $k \in \mathbb{Z}$, amelyre $[f(x)] = k$, minden $x \in \mathbb{R}$ esetén. Innen kapjuk, hogy $f(x) + F(x) = 2k$, bármely $x \in \mathbb{R}$, és beszorozva ezt az összefüggést e^x -nel, az $(e^x \cdot F(x))' = (2k \cdot e^x)'$, bármely $x \in \mathbb{R}$ összefüggéshez jutunk. Innen következik, hogy $e^x F(x) = 2ke^x + c$, bármely $x \in \mathbb{R}$ esetén, vagyis $F(x) = 2k + ce^{-x}$, bármely $x \in \mathbb{R}$ esetén.

Az előbbi összefüggés alapján $f(x) = -ce^{-x}$ minden $x \in \mathbb{R}$ esetén. Mivel $[f(x)] = k$, bármely $x \in \mathbb{R}$ esetén, következik, hogy $[-ce^{-x}] = k$, bármely $x \in \mathbb{R}$ esetén. Viszont $\lim_{x \rightarrow +\infty} (-ce^{-x}) = 0$, ezért $k = 0$. Másrészt $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-x} = +\infty$, ezért $c = 0$. Tehát az egyetlen feltételnek megfelelő függvény a konstans nulla függvény.

4. Tekintsük a $H: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $H(x) = \begin{cases} -\frac{x^3}{2}F\left(\frac{1}{x^2}\right), & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$ függvényt. Az értelmezés

és a megadott feltételek alapján $H'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{H(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} -\frac{x^2}{2}F\left(\frac{1}{x^2}\right) = -\frac{1}{2}L$.

Ugyanakkor $x \neq 0$ esetén $H'(x) = -\frac{3}{2}x^2F\left(\frac{1}{x^2}\right) + f\left(\frac{1}{x^2}\right)$, tehát írhatjuk, hogy

$$H'(x) = \begin{cases} -\frac{3}{2}x^2F\left(\frac{1}{x^2}\right), & x \neq 0 \\ -\frac{3}{2}L, & x = 0 \end{cases} + \begin{cases} f\left(\frac{1}{x^2}\right), & x \neq 0 \\ L, & x = 0 \end{cases}$$

Mivel ebben a felírásban a jobb oldalon megjelenő első függvény folytonos, a második függvény két primitiválható függvény különbsége, tehát ő maga is primitiválható. Másrészt csak egy konstans esetén lehet a g -nek primitívje, tehát a g pontosan akkor primitiválható, ha $c = L$.

VIII. OSZTÁLYOS TANULÓK ORSZÁGOS FELMÉRŐ VIZSGÁJA

2022. június

Minden feladat kötelező. Megjelenés 10 pont. Munkaidő 2 óra.

I. feladatsor (30 pont) – Karikázd be a helyes válasz betűjelét!

1. A $10 + 10 : 10$ számítás eredménye:

- a) 2 b) 9 c) 10 d) 11 (5p)

2. Ha $b \neq 0$ és $\frac{a}{2} = \frac{10}{b}$, akkor ab egyenlő:

- a) 2 b) 5 c) 10 d) 20 (5p)

3. Az 5 ellentettje:

- a) -5 b) $-\frac{1}{5}$ c) $\frac{1}{5}$ d) 5 (5p)

4. Az 1, 3 számot közös nevezőre hozva a következő törtet kapjuk:

- a) $\frac{1}{3}$ b) $\frac{13}{10}$ c) $\frac{4}{3}$ d) $\frac{13}{9}$ (5p)